CONCOURS SUR ÉPREUVES D'ADMISSION DANS LE CORPS DES OFFICIERS DE LA GENDARMERIE NATIONALE

ouvert aux sous-officiers de carrière de gendarmerie titulaires d'une licence de l'enseignement supérieur général ou technologique, d'un autre titre ou diplôme classé au moins de niveau 6 du décret du 8 janvier 2019 relatif au cadre national des certifications professionnelles, d'un titre ou diplôme reconnu comme équivalent à ces derniers ou d'un titre professionnel dont la liste est établie par arrêté du ministre de l'intérieur

- OG SD -
SESSION 2026

ÉPREUVE À OPTION : MATHÉMATIQUES

(Durée : 03 heures – Coefficient : 15 - Note éliminatoire $< 5/20$**)**

Toute les calculatrices sont autorisées, y compris programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome (aucune connexion) et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte 4 pages dont la présente page de titre.

Chaque exercice est indépendant et peut donc être traité dans l'ordre choisi par le candidat, tant que les exercices sont clairement séparés sur la copie.

Exercice 1 - Étude de fonctions

Partie A - Fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-1)e^{-x}$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. *Indication : En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur le polynôme.*
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $f'(x) = (-2x+3)e^{-x}$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations complet de f.
5. Déterminer l'équation de l'asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

Partie B - Fonction logarithme

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 3\ln(x)$$

1. Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2. Déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$. *Indication : En $+\infty$, factoriser par x.*
3. Calculer la dérivée $g'(x)$ et étudier son signe sur $]0; +\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de g et déterminer son minimum.
5. Justifier graphiquement que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$.

Partie C - Intégration

On considère la fonction h définie sur $[0; \ln 2]$ par :

$$h(x) = e^x(e^x - 3)$$

1. Développer $h(x)$ et montrer que $h(x) = e^{2x} - 3e^x$.
2. Vérifier que $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x$ est une primitive de h sur $[0; \ln 2]$.
3. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\ln 2} h(x)\,dx$.

   Bonus : En montrant que $h(x) < 0$ sur $[0; \ln 2]$, interpréter géométriquement la valeur absolue de I.

Exercice 2 - Suite récurrente

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n < \sqrt{3}$ alors $u_{n+1} < \sqrt{3}$.
   (b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < \sqrt{3}$.
3. Étudier le sens de variation de (u_n). *Indication : Étudier le signe de* $u_{n+1} - u_n$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) en résolvant l'équation $\ell = \dfrac{2\ell + 3}{\ell + 2}$.

Exercice 3 - Géométrie

Partie A - Géométrie dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(2, 1, -1)$, $B(1, 3, 0)$ et $C(3, 0, 2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
2. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. On admet qu'un vecteur normal au plan (ABC) a pour coordonnées $\vec{n}(6, -1, -3)$.
   Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4. Soit D le point de coordonnées $(1, 1, 1)$. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
5. Calculer la distance du point D au plan (ABC). *Indication :* $d = \dfrac{|ax_D + by_D + cz_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
   Bonus : Calculez les coordonnées du projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

Partie B - Nombres complexes

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Calculer le module de z_1 et de z_2.
2. Déterminer un argument de z_1 et de z_2.
3. En déduire la forme exponentielle de z_1 et de z_2.
4. Calculer le produit $z_1 \cdot z_2$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ et donner les solutions sous forme algébrique.
   Bonus : Faire une représentation graphique dans le plan complexe et calculer le module et argument des solutions.

Exercice 4 - Probabilités

Partie A - Loi exponentielle

Une entreprise fabrique des composants électroniques dont la durée de vie, exprimée en années, est modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

On rappelle que pour une loi exponentielle de paramètre λ :

$$P(T > t) = e^{-\lambda t} \text{ et } E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

1. Calculer la probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 3 ans.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter ce résultat.
3. Calculer la probabilité qu'un composant ait une durée de vie comprise entre 2 et 5 ans.

Partie B - Loi normale

Une machine produit des pièces dont la longueur, exprimée en millimètres, est une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ mm et d'écart type $\sigma = 2$ mm.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - 50}{2}$?
2. Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard ait une longueur comprise entre 48 mm et 52 mm.
3. On sait que $P(X \leq a) = 0{,}975$. En utilisant la table de la loi normale, déterminer la valeur de a.

Partie C - Intervalle de fluctuation

On prélève un échantillon aléatoire de 100 pièces. On note p la probabilité qu'une pièce ait une longueur inférieure à 48 mm.

1. Calculer la probabilité p.
2. Soit F la variable aléatoire égale à la fréquence des pièces dont la longueur est inférieure à 48 mm dans cet échantillon de taille $n = 100$.

   Justifier que l'on peut approcher la loi de F par une loi normale dont on précisera les paramètres.
3. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique de F au seuil de 95%.

   Bonus : Dans l'échantillon, on observe 8 pièces ayant une longueur inférieure à 48 mm. Cette observation remet-elle en cause le bon fonctionnement de la machine au risque de 5% ? Justifier et interpréter.