CONCOURS SUR ÉPREUVES D'ADMISSION DANS LE CORPS DES OFFICIERS DE LA GENDARMERIE NATIONALE

ouvert aux sous-officiers de carrière de la gendarmerie titulaires d'une licence de l'enseignement supérieur général ou technologique, d'un autre titre ou diplôme classé au moins au niveau II (ancienne nomenclature) et au moins de niveau 6 (nouvelle nomenclature) du décret du 8 janvier 2019 relatif au cadre national des certifications professionnelles, d'un titre ou diplôme reconnu comme équivalent à ces derniers ou d'un titre professionnel dont la liste est établie par arrêté du ministre de l'intérieur

---

- OG SD -

SESSION 2022

ÉPREUVE À OPTION : MATHÉMATIQUES

(Durée : 03 heures - Coefficient : 15 - Note éliminatoire $< 5/20$)

Toutes les calculatrices sont autorisées, y compris programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome (aucune connexion) et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.

Le sujet comporte cinq pages dont une page de titre.

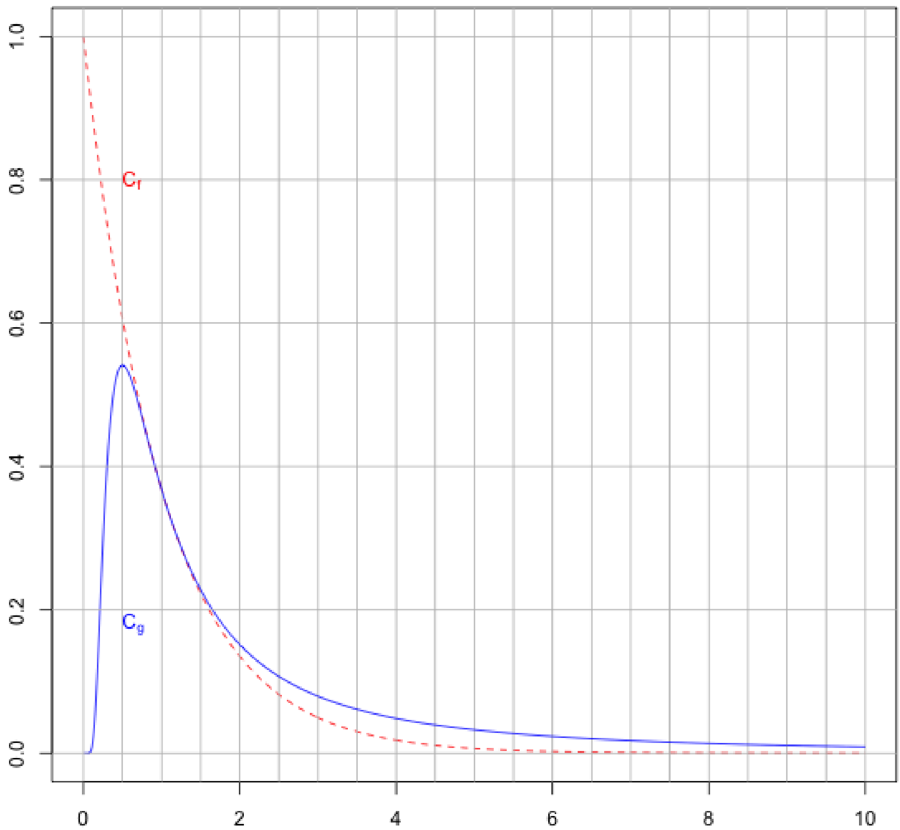
Chaque exercice est indépendant et peut donc être traité dans l'ordre choisi par le candidat, tant que les exercices sont clairement séparés sur la copie.

Exercice 1 - Étude de fonctions

Soient f et g les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

On admet que f et g sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.
Les représentations graphiques de f et g dans un repère orthonormal, désignées respectivement par $\mathscr{C}_f$ (en pointillés) et $\mathscr{C}_g$ (en trait continu), sont données ci-dessous :



Partie A - Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B - Étude de la fonction g

1. Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction g est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \ln(g(x))$.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,
   $$h(x) = \frac{-1 - 2x\ln x}{x}$$
   (b) Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.
   (c) En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif,
   $$g'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$$
4. En déduire les variations de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.

Partie C - Interprétation graphique

1. Démontrer que le point A de coordonnées $(1\,;e^{-1})$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On admet que ce point est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et que $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]1\,;+\infty[$.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Démontrer que :
   $$\int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = e^{-a} + e^{-\frac{1}{a}} - e^{-b} - e^{-\frac{1}{b}}$$
3. Démontrer que :
   $$\lim_{a\to 0} \int_a^1 (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = 1 - 2e^{-1}$$

Exercice 2 - Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_{n+1} = au_n + b \qquad (a \text{ et } b \text{ sont des réels non nuls tels que } a \neq 1)$$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Exercice 3 - Calculs de probabilités

Une opération de police judiciaire, menée par la brigade de recherches de Melun dans le cadre d'une enquête portant sur un trafic de produits stupéfiants, se traduit par la découverte et la saisie de deux types de produits : résine de cannabis et héroïne.
L'audition d'un des mis en cause permet de mettre en évidence que 35% des produits saisis proviennent du fournisseur F_1, 25% proviennent du fournisseur F_2 et le reste du fournisseur F_3. En outre, il est précisé aux enquêteurs que les produits provenant du fournisseur F_1 comportent 80% d'héroïne alors que ceux du fournisseur F_2 en comportent 50% et ceux de F_3 seulement 30%.

1. Afin de procéder à l'inventaire des produits saisis, l'un d'eux est prélevé au hasard. On envisage les événements suivants :
   - F_1 : « le produit prélevé provient du fournisseur F_1 »,
   - F_2 : « le produit prélevé provient du fournisseur F_2 »,
   - F_3 : « le produit prélevé provient du fournisseur F_3 »,
   - H : « le produit prélevé est de l'héroïne »,
   - R : « le produit prélevé est de la résine de cannabis ».

   (a) Calculer la probabilité que le produit prélevé soit de l'héroïne provenant du fournisseur F_3.

   (b) Justifier que la probabilité de l'événement H est égale à $0,525$.

   (c) Le produit prélevé est de l'héroïne. Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur F_1 ? Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

2. Un échantillon de 10 produits est prélevé au hasard parmi ceux saisis. On suppose que le volume de la saisie est suffisamment important pour que ce prélèvement puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 produits parmi ceux saisis.
   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de produits de type "héroïne" dans l'échantillon ainsi prélevé.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 produits de type "héroïne" ? Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

   (c) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte au moins 2 produits de type "résine de cannabis" ? Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

   (d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Exercice 4 - Géométrie

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   (c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2. Soit $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que $\overrightarrow{\mathbf{n}}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

   (a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

   (b) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

   (c) Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = 2t \\ y & = -4t - 3 \\ z & = t \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

   Démontrer que $\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.