CONCOURS SUR ÉPREUVES D'ADMISSION
À L'ÉCOLE DES OFFICIERS DE LA
GENDARMERIE NATIONALE

ouvert aux sous-officiers de carrière de gendarmerie titulaires d'une licence de l'enseignement supérieur général ou technologique, d'un autre titre ou diplôme classé au moins au niveau II (ancienne nomenclature) et au moins de niveau 5 (nouvelle nomenclature) du décret du 8 janvier 2019 relatif au cadre national des certifications professionnelles, d'un titre ou diplôme reconnu comme équivalent à ces derniers ou d'un titre professionnel dont la liste est établie par arrêté du ministre de l'intérieur

- OG SD -

SESSION 2020

ÉPREUVE À OPTION : MATHÉMATIQUES

(Durée : 03 heures – Coefficient : 15 - Note éliminatoire < 5/20)

Toutes les calculatrices sont autorisées, y compris programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome (pas de connexion) et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.

Chaque exercice est indépendant et peut être traité dans l'ordre choisi par le candidat.

<u>Partie I</u> : (7,5 points)

Exercice I-1 (1 point)

1° Énoncer le principe de raisonnement par récurrence.

2° Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{2x}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x : $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice I-2 (2 points)

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}$$

1° Quel est le sens de variation de la suite u ?

2° Démontrer :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad , \quad u_n=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Quelle est la limite de la suite u ?

3° On pose : $M=1{,}333$.
M est-il un majorant de u ?

Exercice I-3 (4,5 points)

m étant un nombre réel, on note f_m la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_m(x)=\frac{x^2-1}{2}-m\ln x \quad ,$$

et C_m sa courbe représentative.

1° a Déterminer la limite de f_m en $+\infty$.

b Suivant les valeurs de m , déterminer la limite de f_m en 0 .

2° Déterminer la fonction dérivée de f_m .
Donner, suivant les valeurs de m , les différents tableaux de variations possibles.

3° a Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan, avec $x_0>0$ et $x_0\neq 1$.
Démontrer qu'il passe une seule courbe C_m par M_0 .

b Démontrer qu'il existe un seul point A appartenant à toutes les courbes C_m .

4° Tracer C_0 , C_4 et C_{-1} sur un même graphique.

<u>Partie II</u> : (7,5 points)

Exercice II-1 (4 points)

1° Déterminer la forme algébrique, puis une forme trigonométrique du nombre Z tel que :

$$Z=\frac{-1+i\sqrt{(3)}}{1+i} \quad .$$

2° En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice II-2 (3,5 points)

1° On considère les points $A(2;-3;0)$, $B(-1;2;4)$ et $C(-3;3;0)$.
Donner une représentation paramétrique :

a de la droite (AB) ;

b de la demi-droite $[BC)$;

c du segment $[AC]$.

2° Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par la condition proposée.

a Le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}$ est le point $A(1;-5;7)$.

b $\mathcal{P}$ passe par les points $A(2;-3;1)$, $B(1;0;2)$ et $C(4;-2;3)$.

c $\mathcal{P}$ est le plan médiateur du segment $[AB]$, avec $A(0;2;1)$ et $B(4;-1;3)$.
Le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu.

d $\mathcal{P}$ est parallèle au plan $\mathcal{Q}$ d'équation $2x+y-3z+7=0$ et passe par $A(3;-2;5)$.

<u>Partie III</u> : (5 points)

Exercice III-1 (1,25 points)

Un parking comporte p places libres repérées par des lettres $A, B, C, \dots$ Déterminer le nombre de façons de répartir n voitures, notées $v_1, v_2, v_3, \dots$ sur ce parking dans chacun des cas suivants.
a $n=2$ et $p=3$ **b** $n=3$ et $p=5$ **c** $n=5$ et $p=3$.

Exercice III-2 (2,5 points)

A la suite de la découverte dans un pays *A* des premiers cas d'une maladie contagieuse non mortelle *M*, il a été procédé dans ce pays à une importante campagne de vaccination : 70 % des habitants ont été vaccinés. Une étude a révélé que 5 % des vaccinés ont été touchés à des degrés divers par la maladie, pourcentage qui s'est élevé à 60 % chez les non-vaccinés.

1° Calculer la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population ait été touché par la maladie.

2° Calculer la probabilité pour qu'un individu ait été vacciné, sachant qu'il a été atteint par la maladie.

Exercice III-3 (1,25 points)

On choisit un nombre au hasard dans $[0;1]$.
Sachant qu'il est supérieur à $0{,}8$, quelle est la probabilité que sa deuxième décimale soit 3 ?