CONCOURS SUR ÉPREUVES D'ADMISSION DANS LE CORPS DES OFFICIERS DE LA GENDARMERIE NATIONALE

ouvert aux sous-officiers de carrière de la gendarmerie titulaires d'une licence de l'enseignement supérieur général ou technologique, d'un autre titre ou diplôme classé au moins au niveau II (ancienne nomenclature) et au moins de niveau 6 (nouvelle nomenclature) du décret du 8 janvier 2019 relatif au cadre national des certifications professionnelles, d'un titre ou diplôme reconnu comme équivalent à ces derniers ou d'un titre professionnel dont la liste est établie par arrêté du ministre de l'intérieur

- OG SD -

SESSION 2023

ÉPREUVE À OPTION : MATHÉMATIQUES

(Durée : 03 heures - Coefficient : 15 - Note éliminatoire $< 5/20$)

Toutes les calculatrices sont autorisées, y compris programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome (aucune connexion) et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.

Le sujet comporte 5 pages dont la présente page de titre.

Chaque exercice est indépendant et peut donc être traité dans l'ordre choisi par le candidat, tant que les exercices sont clairement séparés sur la copie.

Exercice 1 - Étude de fonctions

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + x - 3$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\Big(\ln(x) - 2\Big) + 2$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Démontrer que, pour tout réel $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, la dérivé $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ s'écrit :

   $$f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$$

   où u est la fonction définie dans la partie A.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0\ ;+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \in\,]0\,;\,+\infty[$:

   $$\ln(x) - f(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x}$$

   où f est la fonction définie dans la partie B.
2. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
3. Dans le cadre de cette question, on se place dans l'intervalle $[e^2\ ;+\infty[$.
   Déterminer la valeur de x pour laquelle, dans l'intervalle considéré, l'écart entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est maximal.

Exercice 2 - Étude de suites

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$$

On admet que, pour tout n, u_n est défini et $u_n > 0$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
4. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère désormais la suite (v_n), définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{1+u_n} \quad \text{avec } (u_n) \text{ tel que : } \begin{cases} u_n > 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = 2, \\ u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} \end{cases}$$

1. Démontrer que (v_n) est géométrique et déterminer sa raison q.
2. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \neq 1$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

Exercice 3 - Géométrie dans le plan complexe

Dans cet exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$). On prendra comme unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0$.
2. On considère les point A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_b = 2i$.
   (a) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   (b) Faire une figure et placer les points A et B.
   (c) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
3. On note F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.
   (a) Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que $OAFB$ est un losange.
   (b) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$, puis de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OF})$.
   (c) Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique.
   (d) En déduire la valeur exacte de : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
4. Deux modèles de calculatrices de marques différentes donnent pour l'une :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

   et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

   Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifiez la réponse.

Exercice 4 - Calculs de probabilités

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse.

Au cours d'une épidémie, il a été constaté qu'il y avait, parmi les malades, un vacciné pour quatre non-vaccinés. En outre, on sait qu'au cours de cette épidémie une personne sur douze a été malade, parmi les vaccinés.

1. Démontrer que la probabilité d'être malade était égale à $\frac{5}{48}$.

2. Quelle était la probabilité d'être malade pour un individu non-vacciné ?