CONCOURS SUR ÉPREUVES D'ADMISSION
DANS LE CORPS DES OFFICIERS DE LA
GENDARMERIE NATIONALE

Ouvert aux candidats titulaires d'un diplôme ou titre conférant le grade de master ou d'un diplôme ou titre homologué ou enregistré au répertoire national des certifications professionnelles au niveau niveau 7

- OG SCI -

SESSION 2022

ÉPREUVE DE CAS CONCRET

(Durée : 02 heures 30 – Coefficient : 08 – Note éliminatoire < 05/20)

Remarques préliminaires

- Le sujet propose un panel d'exercices de types différents. Ces exercices sont indépendants et peuvent donc être traités séparément par le candidat. L'objectif est de résoudre un maximum de questions selon les appétences de chacun.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Les candidats sont encouragés à lire l'ensemble du sujet.
- Les énoncés des formules et théorèmes utiles sont fournis en annexe, les formules relevant des programmes de lycée sont toutefois réputées connues des candidats.
- Plusieurs questions demandent une explication qualitative, il est attendu des réponses claires et concises (une dizaine de lignes maximum).
- Les explications des phénomènes interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
- La présentation des copies importe, toute copie difficilement lisible pourra se voir sanctionner.

ANNEXE

- I – Formules nécessaires.

Partie I : Étude du tir d'une grenade lacrymogène

Une manifestation dégénére : des dégradations sont commises et des violences sont exercées à l'encontre des forces de l'ordre. Dans ce cadre, après sommations, un escadron veut recourir à des tirs de grenades lacrymogènes au lanceur de grenades (LG) pour disperser les manifestants particulièrement virulents.
Le tir d'une grenade peut se décomposer en plusieurs phases :

1. La phase de propulsion de la grenade à l'intérieur du lanceur dite balistique intérieure ;
2. La phase de déplacement de la grenade dans l'air dite balistique extérieure.

Une grenade est constituée de deux parties (Figure 1) :

1. un Dispositif de Propulsion à Retard (DPR)
2. le corps de grenade

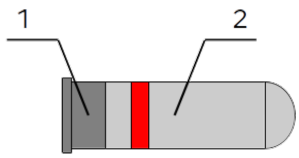

Figure 1 : schéma d'une grenade pour LG

Seul le corps de grenade est projeté lors du tir (le DPR restant dans le lanceur). Sa masse m est de 250g.
Nous nous intéressons dans cette partie uniquement à la trajectoire de la grenade dans l'air après sa sortie du lanceur. La grenade est tirée avec un angle θ réglementaire de 45° et sa vitesse de sortie du canon est v_0 (Figure 2).

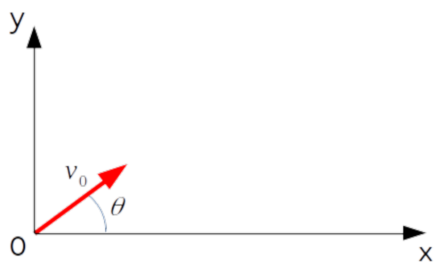

Figure 2 : État initial

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- la gravité est constante avec pour coefficient $g=9{,}81\,m.s^{-2}$;
- la poussée d'Archimède est négligeable ;
- les frottements de l'air sont négligeables.

<u>Trajectoire de la grenade dans le vide</u>

Question n°1. Pourquoi peut-on négliger la poussée d'Archimède ?

Question n°2. Pour quelle raison peut-on considérer la gravité comme constante ?

Question n°3. Écrivez le principe fondamental de la dynamique pour la grenade.

Question n°4. Projetez cette équation sur les deux dimensions x et y .

Question n°5. Résolvez ce système d'équation.

Question n°6. Quelle va être la trajectoire de la grenade ? Exprimez pour cela y en fonction de x .

Question n°7. Quelle doit être la vitesse initiale v_0 pour obtenir une portée (retour de la grenade au sol) de 100m.

Question n°8. Étant donnée cette vitesse initiale, peut-on tirer au-delà de 100m ? Et en-deçà ?

La grenade dispose d'un retard avant son ouverture qui projette des « plots » émettant le gaz lacrymogène. Pour maximiser son effet, cette dispersion doit avoir lieu au point le plus haut de la trajectoire.

Question n°9. Quelle doit être la durée de ce retard ? A quelle hauteur l'ouverture de la grenade va-t-elle se produire ?

Pour aller plus loin

Le modèle utilisé jusqu'à présent traduit mal la réalité de la trajectoire des grenades. En particulier, il est observé que des grenades de poids et formes différents n'ont pas les mêmes comportements.

Question n°10. Quelle est la principale raison expliquant l'écart entre le modèle et la réalité ? Que peut-on en déduire intuitivement sur la balistique du tir ?

Pour mieux traduire la réalité, nous ajoutons au modèle précédent une force supplémentaire $\vec{f}=-k.\vec{v}$ avec $k=0{,}1\,kg.s^{-1}$.

Question n°11. Réécrivez le principe fondamental de la dynamique et sa projection sur les deux dimensions en tenant compte de cette nouvelle force.

Question n°12. Déterminez les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse.

Question n°13. Déduisez-en le retard pour l'ouverture de la grenade en considérant $v_o=30\,m.s^{-1}$.

Partie II : Fonctionnement d'un flux routier

Chaque accident de la route qui se produit engendre inexorablement des complications sur le trafic routier. Cette partie traite divers aspects de la circulation automobile : fluidité ou non d'un trafic routier, formation de bouchons, marche en accordéon... Aucune connaissance préalable n'est requise sur une quelconque théorie du trafic pour cet exercice.

Dans tout le problème on appellera L_0 la longueur des voitures que l'on suppose toutes identiques. On simplifiera le problème en ne considérant qu'une route monovoie en ligne droite. On repérera la position d'une voiture par l'abscisse x et le flux de voitures sera dirigé vers les x croissants.

Question n°1 : On appelle $n(x, t)$ la concentration de voitures par unité de longueur de route à l'abscisse x et à l'instant t

a) Donnez l'unité de n
b) Déterminez la valeur n_{max} du domaine de définition $[0; n_{max}]$de n

Question n°2 : On appelle $j(x, t)$ le débit de voitures, c'est-à-dire le nombre de voitures par unité de temps traversant la section de la route située à l'abscisse x .

a) Donnez l'unité de j
b) Montrez que $j(x, t) = n(x, t)\ v(x, t)$ où $v(x, t)$ est la vitesse des voitures passant en x à l'instant t. Connaissez-vous d'autres domaines de la physique obéissant à une loi de même nature, si oui lesquels ?

Question n°3 : Pour éviter tout sur-accident dans ce flux routier, les véhicules doivent se situer à des distances de sécurité définies. Le code de la route donne le tableau suivant pour les distances de freinage en fonction de la vitesse.

Montrez graphiquement que la distance de freinage est bien proportionnelle à la vitesse au carré.

Vitesse (km/h)	40	50	60	70	100	110	120
Distance de freinage (m)	8	12	18	24	48	58	72

Question n°4 : Nous allons maintenant nous intéresser au flux routier dans son ensemble. On raisonne sur une portion dx de route pendant un instant dt . En supposant qu'il n'y a ni perte, ni création de véhicules, montrez que $j(x, t)$ et $n(x, t)$ vérifient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

Dans les flux routiers la création de bouchons en accordéons est fréquente. Ce type de bouchons est très souvent observé lors d'un accident automobile.

Le modèle continu précédemment étudié est remplacé par un modèle discret où chaque véhicule est répertorié. Les véhicules vont ainsi être considérés comme une chaîne infinie d'oscillateurs couplés. Les voitures sont numérotées par le nombre entier n . On repère la position G_n de l'avant du véhicule n par rapport au point O_n , où $OO_n = nL_0$. Les points O_n sont ainsi régulièrement espacés d'une distance L_0 et lorsque les G_n sont confondus avec les O_n , toutes les voitures sont pare-chocs contre pare-chocs. On note $\xi_n = O_nG_n$ (algébrique).

Tous les conducteurs sont supposés se comporter de la même façon. Le trafic est supposé congestionné de telle sorte que chaque conducteur tente d'adapter sa vitesse pour respecter la distance de sécurité avec la voiture qui le précède. Cette vitesse dite de référence est donnée par l'équation $v^{réf}_n(t) = D_n(t) / \tau_d$ où $D_n(t)$ représente la distance entre l'arrière du véhicule n + 1 et l'avant du véhicule n , τ_d étant une constante homogène à un temps. L'équation qui traduit le comportement du conducteur de la voiture n'ayant une vitesse notée $v_n(t)$ s'écrit :

$$\tau_2 \frac{dv_n}{dt}(t) + v_n(t) = v_n^{\text{réf}}(t - \tau_1)$$

où τ_1 et τ_2 sont des constantes caractéristiques propres à l'ensemble conducteur + voiture.

Question n°5 : Pour comprendre cette équation, on étudie la réponse à un échelon de vitesse : on suppose *$v^{réf}_n(t) = 0$ si $t<0$ et $v^{réf}_n(t) = V_0$ si $t>0$.*

a) Vérifiez que $v_n(t) = 0$ pour $t<0$ est bien solution.

b) Que vaut $v_n(t)$ pour $0<t<\tau_1$?

c) Déterminez $v_n(t)$ pour $t>\tau_1$.

d) Donnez l'allure de $v^{réf}_n(t)$ et $v(t)$ en fonction du temps. Introduire graphiquement le temps τ_2 .

e) Donnez une signification aux deux constantes τ_1 et τ_2 (on demande une interprétation qualitative).

Partie III : Accidents, probabilités et statistiques

On a répertorié sur cet axe routier le nombre d'accidents matériels ou corporels sur une période de 200 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1

Par exemple, la colonne 4 indique que le nombre de journées où il s'est produit 2 accidents est de 22.

Question n°1 : Quel est le nombre moyen d'accidents par jour ? Interprétez concrètement le résultat trouvé.

Question n°2 : On ajuste cette distribution par une loi de Poisson. Justifiez cette décision et précisez cette loi. Comparez avec un ajustement par la loi binomiale.

Question n°3 : Quel est le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents ? Comparez avec la réalité.

Le modèle suivant peut être utilisé pour représenter le nombre de blessés dans les accidents de la circulation au cours d'un week-end.

Le nombre d'accidents suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Le nombre de blessés par accident, suit une loi de Poisson de paramètre μ.
Le nombre total de blessés est donc :

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

S est la somme d'un nombre aléatoire de variables de Poisson, indépendantes et de même loi, N étant le nombre d'accidents.

Question n°4 : Donnez une expression pour $P(S = s)$.

Question n°5 : Calculez $P(S = 0)$.

Question n°6 : Calculez $E(S)$ et $V(S)$.

Un conducteur sobre a une chance sur 1000 d'avoir un accident de voiture au cours d'une période. Un conducteur ivre a une chance sur 50 d'avoir un accident au cours de la même période. On admet qu'un conducteur sur 100 conduit en état d'ivresse.

Question n°7 : Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un accident et que le conducteur soit ivre ?

Question n°8 : Lorsqu'il y a un accident, quelle est la probabilité pour que le conducteur soit ivre ?

Formules nécessaires

Principe fondamental de la dynamique

- Vecteur quantité de mouvement :
  $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ (en général)

- Principe fondamental de la dynamique :
  $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{i_e}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{i_c}}$$

- Principe des actions réciproques : pour deux corps *A* et *B*,
  $\boldsymbol{F}_{A\to B} = -\boldsymbol{F}_{B\to A}$

Aspect énergétique

- Travail élémentaire d'une force $\boldsymbol{F}$ lors d'un déplacement d$\boldsymbol{r}$:
  $\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

- Travail le long d'un chemin Γ_{AB} :
  $$W_{A\to B} = \int_{\boldsymbol{r}\in\Gamma_{AB}} \delta W(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}\in\Gamma_{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{r})$$

- Puissance :
  $$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}$$

- On peut aussi définir la puissance comme étant le produit scalaire de la force appliquée au point M avec la vitesse du point :
  $\mathcal{P} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$

- Énergie cinétique d'un point matériel :
  $$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}|^2$$

- Théorème de l'énergie cinétique :
  $$\Delta E_{\mathrm{c}} = \sum W(\boldsymbol{F}) + W(\boldsymbol{f}_{\mathrm{i_e}}) + W(\boldsymbol{f}_{\mathrm{i_c}})$$

- Énergie mécanique :
  $E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}$

Equations différentielles

1.1 Equations homogènes (sans second membre)

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = 0$)
Soient $a \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I et y une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $y' + ay = 0$ sur I.
(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $y = \lambda e^{-A}$ sur I.
Si de plus une condition initiale $y(x_0) = y_0$ est imposée, avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, alors la valeur de la constante λ est fixée ; l'équation avec condition initiale possède une unique solution.

1.2 Equations avec second membre

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie par :
$$\forall x \in I, y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)-A(x)} dt.$$

Partie Probabilité

Espérance mathématique

- Calcul direct
  - variable discrète

$$E(X) = \sum_X x_i P(X = x_i)$$

  - variable continue

$$E(X) = \int_{D_{X_x}} t f(t) dt$$

- Espérance d'une somme

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Variance

- Variances conditionnelles

$$V(X/Y) = E[X - E(X/Y)]^2 \qquad V(Y/X) = E[Y - E(Y/X)]^2$$

- Théorème de la variance totale

$$V(Y) = V[E(Y/X)] + E[V(Y/X)]$$

Lois de probabilités

Loi	Définition	Espérance	Variance
Uniforme	$P(X = x) = \frac{1}{n} \quad x \in \{1,2,\ldots,n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x \in \{0,1\}$	p	$p(1-p)$
Pascal	$P(X = x) = p(1-p)^{1-x} \quad x \in \{1,2,\ldots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomiale	$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \quad x \in \{0,1,\ldots n\}$	np	$np(1-p)$
Hyper-géométrique	$P(T = t) = \frac{C_{N_p}^t C_{N-N_p}^{n-t}}{C_N^n}$ $t \in \{\min(0, n - Np), \ldots \max(n, Np)\}$	np	$np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$
Poisson	$P(X = x) = e^{-m}\frac{m^x}{x!} \quad x \in \{0,1,\ldots n\}$	m	m

Théorème de Bayes

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$, à condition que $P(B) \neq 0$

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A)Pr(A)}{Pr(B|A)Pr(A) + Pr(B|\bar{A})Pr(\bar{A})}$$

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$