

**CONCOURS SUR ÉPREUVES D'ADMISSION  
DANS LE CORPS DES OFFICIERS DE LA  
GENDARMERIE NATIONALE**

Ouvert aux candidats titulaires d'un diplôme ou titre conférant le grade de master ou d'un diplôme ou titre homologué ou enregistré au répertoire national des certifications professionnelles au niveau I de la nomenclature française ou au moins de niveau 7 de la nomenclature européenne

—

- OG SC -

Session 2021

**ÉPREUVE DE CAS CONCRET**

**(Durée : 02 heures 30 - Coefficient : 08 - Note éliminatoire < 05/20)**

*Étude épidémiologique*

## Remarques préliminaires

- **L'usage de la calculatrice est autorisé.**
- Les candidats sont encouragés à lire l'ensemble du sujet et à traiter les questions dans l'ordre.
- Les deux parties du sujet sont indépendantes et peuvent donc être traitées séparément par le candidat.
- Bien que traitant d'une épidémie, le sujet ne requiert pas de connaissances particulières en médecine ou en biologie.
- L'épidémie traitée dans le sujet est « générique », le candidat ne doit se référer qu'aux éléments fournis dans l'énoncé en faisant abstraction de toutes épidémies en cours ou passées.
- Les énoncés des formules et théorèmes utiles sont fournis, les formules relevant du programme de lycée sont toutefois réputées connues des candidats.
- Plusieurs questions demandent une explication qualitative, il est attendu des réponses claires et concises (une dizaine de lignes maximum).
- Les explications des phénomènes interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
- Les questions informatiques précisent « Écrivez en langage Python... », les réponses doivent donc utilisées exclusivement ce langage de programmation.

# Présentation générale

Dans ce sujet, nous étudierons une maladie frappant une population donnée. L'analyse de cette maladie et de l'épidémie résultante se fera selon deux parties indépendantes :

- la **Partie I** étudie un modèle de propagation de l'épidémie ;
- la **Partie II** s'intéresse au traitement de la maladie.

# Première partie

## Modélisation de l'épidémie

Dans cette partie, il s'agit d'étudier différents modèles de propagation de l'épidémie.

### 1 Modèle SIR

Dans un premier temps, nous considérons une population constante, homogène et uniforme de  $P$  individus. Au sein de cette population, on distinguera 3 catégories :

- **Les individus sains** susceptibles d'être contaminés dont la population est noté  $S(t)$  ;
- **Les individus infectés** par la maladie dont la population est noté  $I(t)$  ;
- **Les individus rétablis**<sup>1</sup> dont la population est noté  $R(t)$ .

La propagation de la maladie se fait par contact entre les personnes saines et celles infectées. La probabilité pour un individu donné de contracter la maladie à l'instant  $t$  est donc proportionnelle à la taille de la population infectée  $I(t)$  soit  $\beta.I(t)$  où  $\beta > 0$  est appelé taux d'infection. Ainsi, le nombre de contamination à un instant donné est :

$$\beta.I(t).S(t)$$

De même la probabilité pour une personne de guérir est  $\gamma$  aussi appelé taux de guérison avec  $0 < \gamma < 1$ . Ainsi, le nombre de guérison à un instant donné est :

$$\gamma.I(t)$$

On considère qu'au début de l'épidémie, le nombre de personnes infectées est  $I_0$ .

- Q1.** Décrivez sous forme de diagramme les différentes populations et les flux entre elles.
- Q2.** Écrivez le système d'équations caractérisant ce problème.
- Q3.** Comment évoluent à priori les différentes populations au cours du temps ?

On s'intéresse au(x) seuil(s) épidémique(s), c'est à dire au(x) moment(s) noté(s)  $t_s$  où la croissance du nombre de personnes infectées est nulle.

- Q4.** Quelles sont les conditions pour être sur un seuil épidémique ?
- Q5.** Que peut-on en déduire sur l'évolution du nombre de personnes infectées ?
- Q6.** Que penser alors de la stratégie de l'immunité collective ?

---

1. Les individus rétablis sont considérés comme immunisés à la maladie

## 2 Résolution numérique

Ce système d'équations différentielles ne présentant pas de solution explicite, il est nécessaire de recourir à une méthode de résolution numérique pour en analyser plus finement le comportement. Pour cela, le problème sera discrétisé avec un pas de temps constant  $\Delta t$  tel que  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  et on notera :

$$\begin{cases} S_n = S(t_n) \\ I_n = I(t_n) \\ R_n = R(t_n) \end{cases}$$

En première approche, nous pouvons utiliser la méthode d'Euler explicite qui consiste à approximer la dérivée d'une fonction par un développement limité direct (ie. utilisant la valeur de la dérivée en  $t_n$ ), soit pour une fonction  $f$  :

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \frac{df}{dt}(t)\Delta t$$

**Q7.** Écrivez les équations du problème ainsi discrétisé avec l'approximation d'Euler.

**Q8.** En utilisant cette méthode de résolution, écrivez en langage Python une fonction permettant de connaître le nombre de personnes infectées au moment du pic épidémique en fonction des paramètres  $\Delta t$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $I_0$  et  $P$  du problème.

En observant l'évolution empirique du nombre de personnes infectées et guéries quotidiennement, il est possible de déterminer les paramètres  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $I_0$  et donc de prévoir le seuil épidémique.

**Q9.** De quelle domaine des Data Science relève ce genre d'approche ?

**Q10.** La méthode d'Euler explicite est-elle suffisamment fiable pour résoudre notre problème ?

**Q11.** Quelles solutions sont envisageables pour améliorer la stabilité et la précision de la solution numérique ?

## 3 Lutte contre l'épidémie

Suite aux simulations précédentes, il apparaît qu'en l'absence de mesure particulière le seuil épidémique sera trop important en terme de personnes infectées pour être supportable par le système hospitalier. Pour y remédier, il est décidé de mettre en place un confinement de l'ensemble de la population à partir de l'instant  $t_c$ .

**Q12.** Comment traduire ce confinement dans le modèle précédent ?

**Q13.** Quelle contrainte doit être satisfaite pour que l'épidémie se réduise dès le début du confinement ?

À l'issue de la période de confinement à  $t = t_d$ , il est décidé de mettre en place des mesures barrières pour éviter une reprise de l'épidémie.

**Q14.** Quelle est la condition pour éviter un second pic épidémique à l'issue du confinement ?

## 4 Mortalité

Nous sommes désormais en présence d'une maladie mortelle. La population globale ne sera donc plus considérée comme constante et sera désormais notée  $P(t)$  avec une population initiale  $P$ .

À chaque instant, la mortalité de la maladie vaut quant à elle :

$$\delta \cdot I(t)$$

où  $\delta > 0$  est le taux de mortalité.

**Q15.** Quelle est le nouveau système d'équations différentielles régissant ce système ?

**Q16.** Quel est l'impact de cette mortalité sur le seuil épidémique ?

## 5 Période d'incubation

Pour affiner le modèle, on considère désormais qu'il existe une période d'incubation pendant laquelle les individus contaminés dont la population est notée  $C(t)$  ne sont pas encore contagieux.

Le nombre instantané de contaminations ne change pas et vaut toujours :

$$\beta \cdot I(t) \cdot S(t)$$

La période d'incubation moyenne est de  $\nu$  jours, ainsi le nombre de personne passant de la catégorie « contaminé » à « infecté » à chaque instant vaut donc :

$$\frac{C(t)}{\nu}$$

On considère qu'au début de l'épidémie il y a également  $C_0$  personnes contaminées en plus des  $I_0$  personnes infectées.

**Q17.** Reprenez le schéma de la première question en y ajoutant la phase de contamination ainsi que la mortalité.

**Q18.** Quelle est le nouveau système d'équations différentielles régissant ce système ?

## 6 Pour aller plus loin

Le modèle SIR étudié jusque là est aujourd'hui largement utilisé pour analyser les épidémies. Pour autant, il repose sur des hypothèses simplificatrices.

**Q19.** En vous basant sur des modèles « classique » de physique et de mécanique, comment pourrait-on prendre en compte la distribution spatiale de la population dans le modèle SIR initial ?

**Q20.** Quelle(s) autre(s) approche(s) pourriez-vous également proposer pour étudier le phénomène de la propagation d'une épidémie ?

## Deuxième partie

# Traitement de la maladie

**Rappels** Pour deux événements  $A$  et  $B$ , la formule de Bayes donne :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

### 1 Stratégie de test

Afin d'éviter un confinement généralisé, on souhaite pouvoir identifier efficacement les individus infectés pour les isoler et ainsi réduire les risques de contamination. Pour cela, un test de dépistage a été mis au point par un laboratoire.

**Q21.** Quel protocole expérimental peut être mis en place pour mesurer l'efficacité de ce test ?

À l'issue des tests, il est estimé que le test est positif pour toutes les personnes malades et pour seulement 1% des personnes non malades. À cet instant, l'épidémie touche déjà 2% de la population.

Pour une personne donnée, on considère les événements suivants :

- $M$  : la personne est malade ;
- $+$  : la personne est testée positive.

**Q22.** Une personne est testée négative, que peut-on en conclure d'après la formule de Bayes ?

**Q23.** Une personne est testée positive, que peut-on en conclure d'après la formule de Bayes ?

**Q24.** Quelle part de la population devrait être infectée pour être sur à 95% qu'une personne testée positive soit effectivement malade ?

**Q25.** Quel taux maximum de faux positifs lors des essais est nécessaire pour qu'un test permette de garantir à 95% qu'une personne est malade avec les 2% de la population touchée actuellement par la maladie ?

**Q26.** Que pensez-vous de la pertinence d'une stratégie de tests pour isoler les malades en vue de réduire la propagation de la maladie basée sur ce test ?

Un traitement efficace contre la maladie est connu mais celui-ci peut également occasionner des effets secondaires graves.

**Q27.** Peut-on se baser sur les résultats de ce test afin d'administrer ce traitement ?

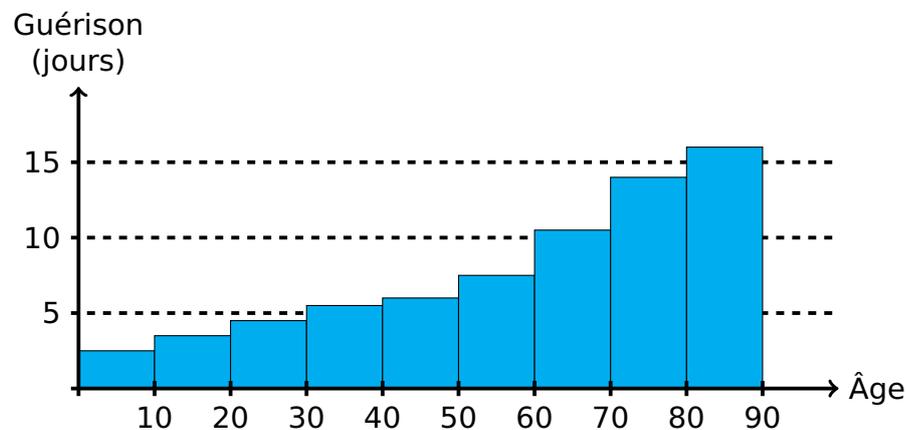
Un nouveau test a été mis au point. Celui-ci se révèle 10 fois plus précis que le précédent avec seulement 0,1% des personnes non malades testées positives mais il est aussi beaucoup plus coûteux à réaliser que le précédent.

**Q28.** Comment proposez-vous d'utiliser ce nouveau test ?

## 2 Traitements médicaux

Afin de trouver de potentiels traitements efficaces pour traiter la maladie, on s'intéresse à un échantillon de personnes atteintes de la maladie et l'on regarde la durée de guérison à la recherche d'éventuels facteurs communs (âge, prise en charge médicale, médicaments prescrits et autres traitements en cours...).

Dans un premier temps, on observe que la durée de guérison moyenne augmente fortement avec l'âge des patients (voir ci-dessous).



**Q29.** Comment s'appelle ce genre de relation entre âge et durée moyenne de guérison ?

L'étude permet également de tirer une première conclusion : les personnes décédées ont toutes connu une aggravation préalable de leur état. Toutefois dans de rares cas, des personnes ayant connu une aggravation de leur état ont pu guérir.

Si l'on s'intéresse aux points communs entre les personnes ayant survécu à une aggravation de leur état, on identifie les éléments suivants :

- les patients étaient très majoritairement âgés de moins de 40 ans ;
- les patients ont tous été pris en charge rapidement dans le milieu hospitalier ;
- dans la plupart des cas, les patients avaient une bonne hygiène de vie avant de contracter la maladie (activité sportive régulière, nourriture saine et équilibrée...);

**Q30.** Que peut-on tirer de ces observations ?

On s'intéresse maintenant aux traitements prescrits où déjà en cours chez les patients alors qu'ils étaient malades et l'on peut faire les observations suivantes :

- Les personnes ayant reçu le médicament A ont guéris en moyenne plus rapidement que les autres ;
- Les personnes ayant reçu le médicament B ont en moyenne connu une période de convalescence plus longue ;
- Les autres médicaments ne semblent pas avoir eu d'impacts particuliers.

**Q31.** Le médicament B est principalement utilisé sur des personnes âgées pour lutter contre la surtension artérielle, sa prescription doit-elle être suspendue ?

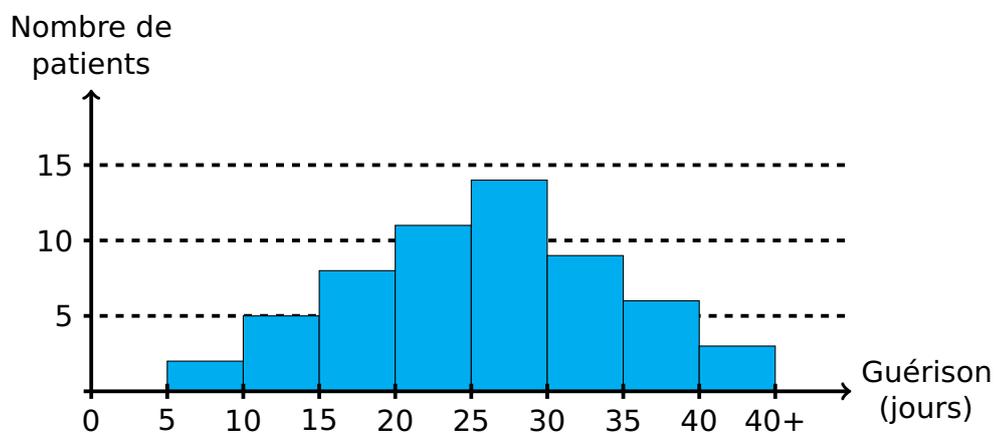
Le médicament A semble à priori intéressant pour soigner la maladie. Toutefois, il ne peut être utilisé sans la réalisation préalable d'essais cliniques<sup>2</sup>.

**Q32.** Décrivez le principe de ce type d'expérience ?

**Q33.** Quels est l'intérêt de réaliser de tels essais ?

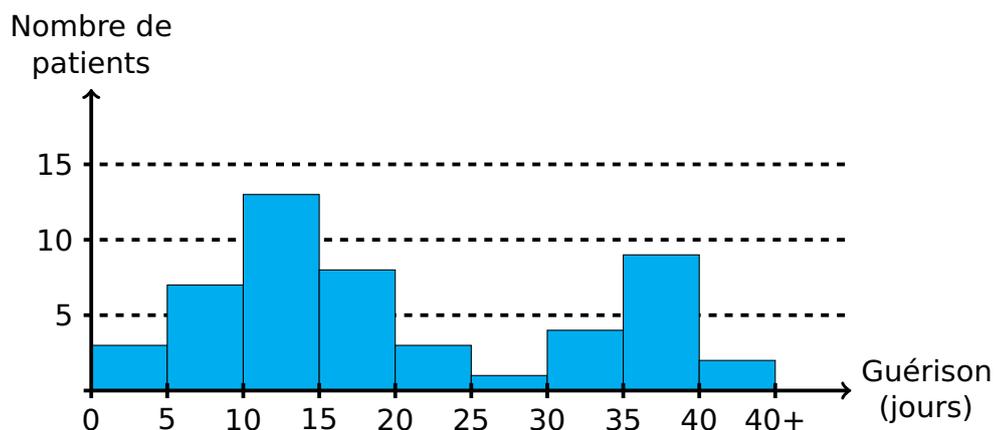
**Q34.** Comment peut-on aller plus loin pour réduire la variabilité de l'essai ?

Les essais conduits sur ce traitement permettent d'obtenir les résultats suivants :



La durée moyenne de guérison s'élève à 24,8 jours.

Un nouveau traitement potentiel a été mis au point par un autre laboratoire et donne cette fois les résultats suivants pour des conditions similaires :



La durée moyenne de guérison s'élève quant à elle à 21,6 jours.

**Q35.** Que pensez-vous de ce nouveau traitement ?

2. Un essai clinique n'est ni plus ni moins qu'un essai randomisé contrôlé sur groupes parallèles

Le jeu de données de l'étude du second traitement contient pour chaque patient un certain nombre d'informations dont :

- Durée de guérison ;
- Âge ;
- Genre ;
- Lieu de résidence ;
- Symptômes observés ;
- Évolution des symptômes ;
- Antécédents médicaux ;
- Allergies ;
- ...

**Q36.** Comment pourrait-on exploiter ces données pour affiner les résultats précédents ?